四次元から見たunknotting operations I(結び目の変形に関する研究)

安原, 晃

数理解析研究所講究録
813巻 1992年 29-34

四次元から見たunknotting operations I

早大理工 安原 晃 (Akira Yasuhara)

ここでは、特にことわらないかぎり、smooth category で、knot および manifold は全て oriented とします。

ある素数 p に対して、Fig. 1 のような knot diagram の local move を $\#^p$-move と呼ぶことにします。

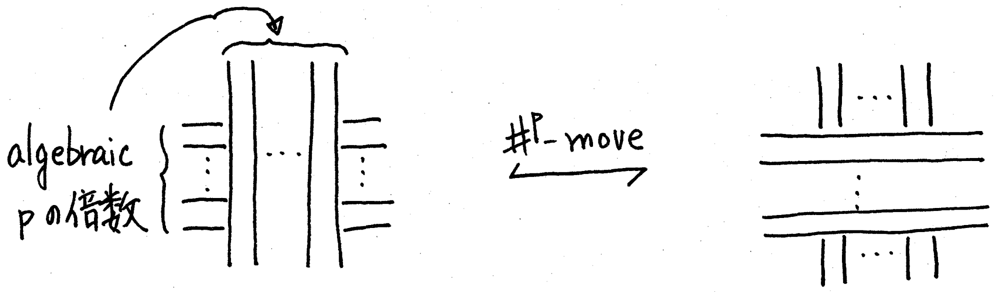

Fig. 1

注: $\#^p$-move では、縦と横の string の本数は同じでなくてもよい。

命題1. $\#^p$-move は unknotting operation である。即ち、任意の knot は有限回の $\#^p$-move (pを固定) で、trivial knot にできる。

定理2. knot k_1, k_2 に対して. もし k_2 が k_1 から1回の $\#^p$-move で得られるとき. k_1 の diagram で $\#^p$-move をほどこすところの格子点の符号の総数 (= (正の総数) + (負の総数)) は. $\#^p$-move をほどこす場所や knot diagram に依存せず. knot type と p のみに依存する.

定理2を証明する為に. いくつか定理と補題を導入します.

定理3. (Rohlin [R]) M を connected, simply connected, closed 4-manifold とする. $H_2(M)$ の元 ξ が M 内の 2-sphere で実現されているとき. 次が成立する.

(i) もし ξ が2で割れるならば.

$$\left|\xi^2/2 - \sigma(M)\right| \leqq \operatorname{rank} H_2(M).$$

(ii) もし ξ が奇素数 q で割れるならば.

$$\left|\xi^2(q^2-1)/2q^2 - \sigma(M)\right| \leqq \operatorname{rank} H_2(M).$$

定理4. (Kervaire and Milnor [K-M]) M は定理3と同じものとする. もし $H_2(M)$ の特性類 ξ が M 内の 2-sphere で実現されているならば. $\xi^2 \equiv \sigma(M) \mod 16$ が成立する.

Kirby's calculus と Fig.2 より. ただちに次の補題が得られ

る．

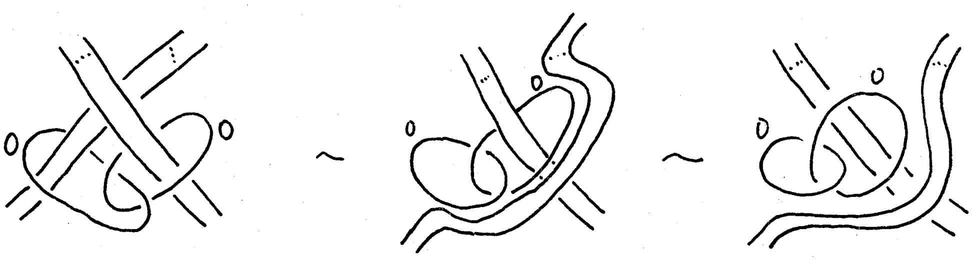

Fig. 2.

補題5．k_1 を knot．k_2 を k_1 から1回の $\#^p$-move で得られた knot とする．n を k_1 の diagram で $\#^p$-move をほどこすところの格子点の符号の総数とする．このとき，$S^2\times S^2-\mathrm{int}(B_1^4\cup B_2^4)$ に proper に埋め込まれた annulus A で次の性質を満たすものが存在する．

(i) $A\cap\partial B_1^4=k_1$，$A\cap\partial B_2^4=-k_2^!$

(ii) A が実現する $H_2(S^2\times S^2-\mathrm{int}(B_1^4\cup B_2^4),\partial)$ の元は p で割れ，かつ，$\xi^2=2n$ を満たす．

ここで，$-k^!$ は k の reflected inverse を表わす．

定理2の証明．k_1 から k_2 を得る $\#^p$-move が2通りあって，それらから決まる格子点の総数を n_1，n_2 とする．

補題5より，各 n_i $(i=1,2)$ に対して，$M_i=S^2\times S^2-\mathrm{int}(B_{i1}^4\cup B_{i2}^4)$

に proper に埋め込まれた annulus A_i が存在して.

(i) $A_i \cap B^4_{i1} = k_1$, $A_i \cap B^4_{i2} = -k'_2$

(ii) A_i が実現する $H_2(M_i, \partial)$ の元 ξ_i は. p で割れて. $\xi_i^2 = 2n_i$ を満たす.

このとき pair の orientation reversing diffeo

$$f : (\partial B^4_{12}, \partial B^4_{12} \cap A_1) \longrightarrow (-\partial B^4_{22}, -\partial B^4_{22} \cap (-A_2))$$

が存在するので. $M = M_1 \cup_f (-M_2)$, $A = A_1 \cup_f (-A_2)$ とおく.

そこで. A 上に proper arc をとり. その M での neighborhood を M からとり除くことにより得られる manifold を M'. $M' \cap A = A'$ とすると. M' は punctured $2(S^2 \times S^2)$, A' は M' に proper に埋め込まれた 2-disk で $\partial A' = k_1 \# (-k'_1)$ を満たす. 更に A' が実現する $H_2(M', \partial)$ の元 ξ は p で割れて. $\xi^2 = 2n_1 - 2n_2$ を満たす. $k_1 \# (-k'_1)$ が slice knot であることから ξ が $2(S^2 \times S^2)$ 内の 2-sphere で実現できることがわかる.

そこで. $p = 2$ のときは. 定理3 および定理4 から $n_1 = n_2$ が導かれ. $p \neq 2$ のときは. 定理3 から $n_1 = n_2$ が導かれる. //

定義. k を knot. $\mathcal{K}(k, p)$ を k から1回の $\#^p$-move により. 得られる knot の集合とする. このとき. $k' \in \mathcal{K}(k, p)$ に対して. $\varphi_{(k,p)}(k')$ を k に $\#^p$ move をほどこすところの格子点の符号の総数とすることにより. 関数 $\varphi_{(k,p)} : \mathcal{K}(k, p) \to \mathbb{Z}$ を

定義する．この定義がwell-definedであることは，定理2により保証される．また，定理2の証明をみれば，$\varphi(k,p)$ は cobordism invariant であることがわかる．即ち，$k', k'' \in \mathcal{K}(k,p)$ に対して $k' \overset{c}{\sim} k''$ ならば，$\varphi(k,p)(k') = \varphi(k,p)(k'')$ が成立する．

例．TをS^3内のsolid torus，kをT内のknotでTのmeridianとkとのlinking numberをlとする．またk_tをkからTのmeridianに沿う$-2t$-full twistにより得られたknotとする．もしlがある素数pで割れるならば，$k_t \in \mathcal{K}(k,p)$であり，さらに$\varphi(k,p)(k_t) = tl^2$なので，$t \neq t'$ならば$k_t \overset{c}{\not\sim} k_{t'}$である

定理2の証明とほぼ同様にして，次の定理を示すことができる．

定理6．$k_0, k_1, \dots, k_n$をknotの列で，k_iはk_{i-1}から1回の$\#^p$-moveで得られるknotとする．

(i) $p=2$かつ，$k_0 \overset{c}{\sim} k_n$ならば，$\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(k_{i-1},2)(k_i)\right| \leq 2n$ かつ $\sum_{i=1}^{n} \varphi(k_{i-1},2)(k_i) \equiv 0 \mod 8$

(ii) $p^2 > 2n+1$，$p \neq 2$ かつ $k_0 \overset{c}{\sim} k_n$ ならば $\sum_{i=1}^{n} \varphi(k_{i-1},p)(k_i) = 0$

(iii) k_nがslice knot，$p^2 > 2n+1$ かつ $\sum_{i=1}^{n} \varphi(k_{i-1},p) \neq 0$ ならば，k_0のcobordism groupでのorderはinfinite．

系6.1. k_0, k_1, k_2, k_3 を定理6のようなknotの列とする. $k_0 \sim k_3$ ならば. $\sum_{i=1}^{3} \varphi_{(k_{i-1}, p)}(k_i) = 0$

例. kを(-3.7)-torus knotの(3.7)-cableとすると. $\sigma(k)=0$ かつ $\mathrm{Arf}(k)=0$ である. ところがkは1回の$\#^3$-moveでtrivial knot Oになることがわかり. $\varphi_{(k,3)}(O) = 9$ となる. 従って. 定理6(iii)よりkのcobordism groupでのorderはinfinite.

参考文献

[K-M]. M. A. Kervaire and J.W. Milnor, *On 2-sphere in 4-manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 47 (1961), 1651-1657.

[R] V. A. Rohlin, *Two-dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds*, Functional Anal. Appl., 5 (1974), 39-48.